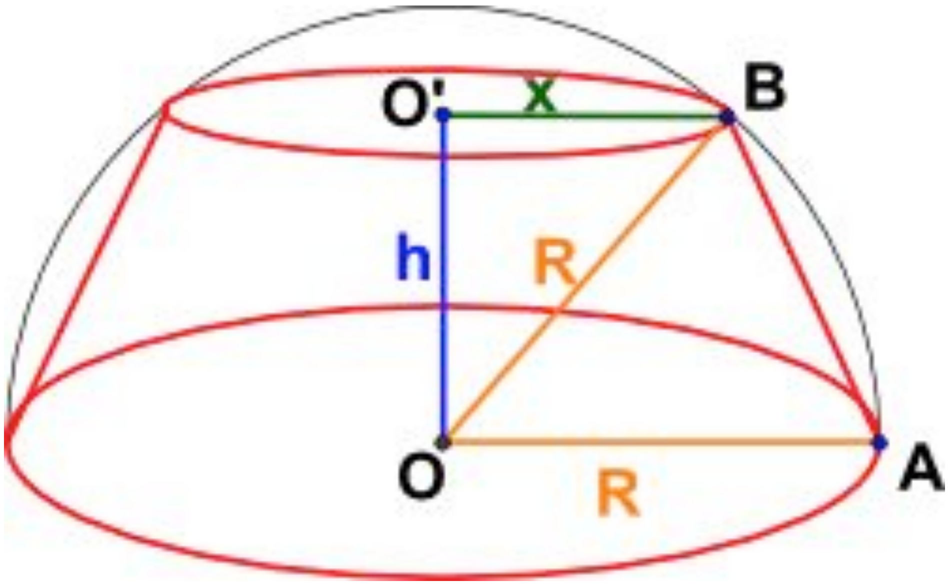
DOCENTE: Vincenzo Pappalardo
MATERIA: Matematica

Problemi di massimo e minimo



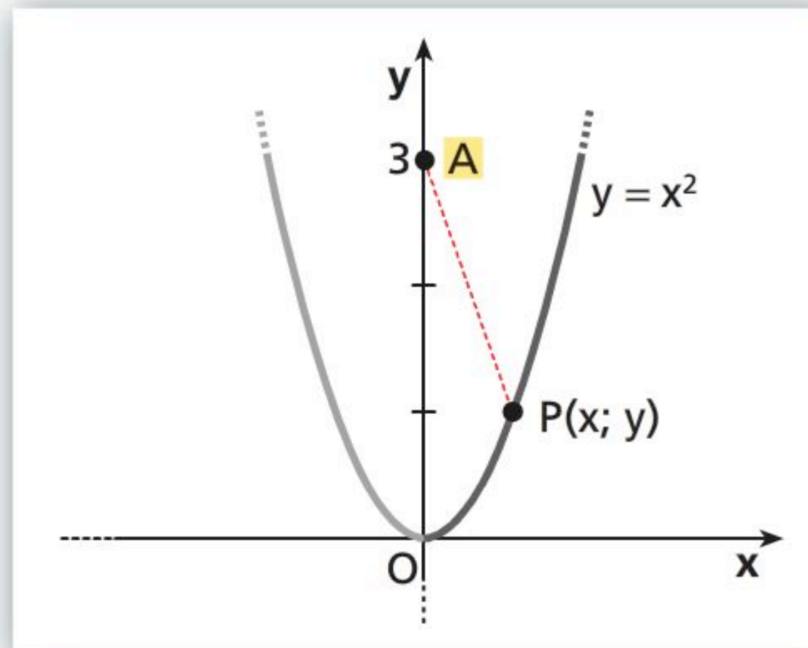
In generale, **per risolvere problemi di massimo o di minimo**:

- si cerca la funzione da rendere massima o minima; tale funzione viene anche detta **funzione obiettivo**;
- si pongono le **condizioni** (o **vincoli**) relativi alla variabile indipendente;
- si determinano i massimi o i minimi della funzione;
- fra i valori trovati, si accettano soltanto quelli che soddisfano le condizioni poste.

ESEMPIO

1. Data la parabola di equazione $y = x^2$, determiniamo fra i punti del suo grafico quello che appartiene al primo quadrante e ha la distanza minima dal punto $A(0; 3)$.

Rappresentiamo la parabola, che ha il vertice nell'origine degli assi, e il punto A, tracciando anche il segmento PA, con P punto generico della parabola (figura 28).



Il punto P ha coordinate $(x; x^2)$ e, poiché deve appartenere al primo quadrante, poniamo la condizione: $x \geq 0$.
Determiniamo la distanza $\overline{PA}$, utilizzando la formula della distanza fra due punti:

$$\overline{PA} = \sqrt{(x-0)^2 + (x^2-3)^2} = \sqrt{x^2 + x^4 + 9 - 6x^2} = \sqrt{x^4 - 5x^2 + 9}.$$

Poiché dobbiamo determinare il punto P in modo che la distanza $\overline{PA}$ sia minima, dobbiamo cercare il minimo della funzione:

$$f(x) = \sqrt{x^4 - 5x^2 + 9}, \quad \text{con } x \geq 0.$$

Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^4 - 5x^2 + 9}} \cdot (4x^3 - 10x) = \frac{2x(2x^2-5)}{2\sqrt{x^4 - 5x^2 + 9}} =$$

$$= \frac{x(2x^2-5)}{\sqrt{x^4 - 5x^2 + 9}}.$$

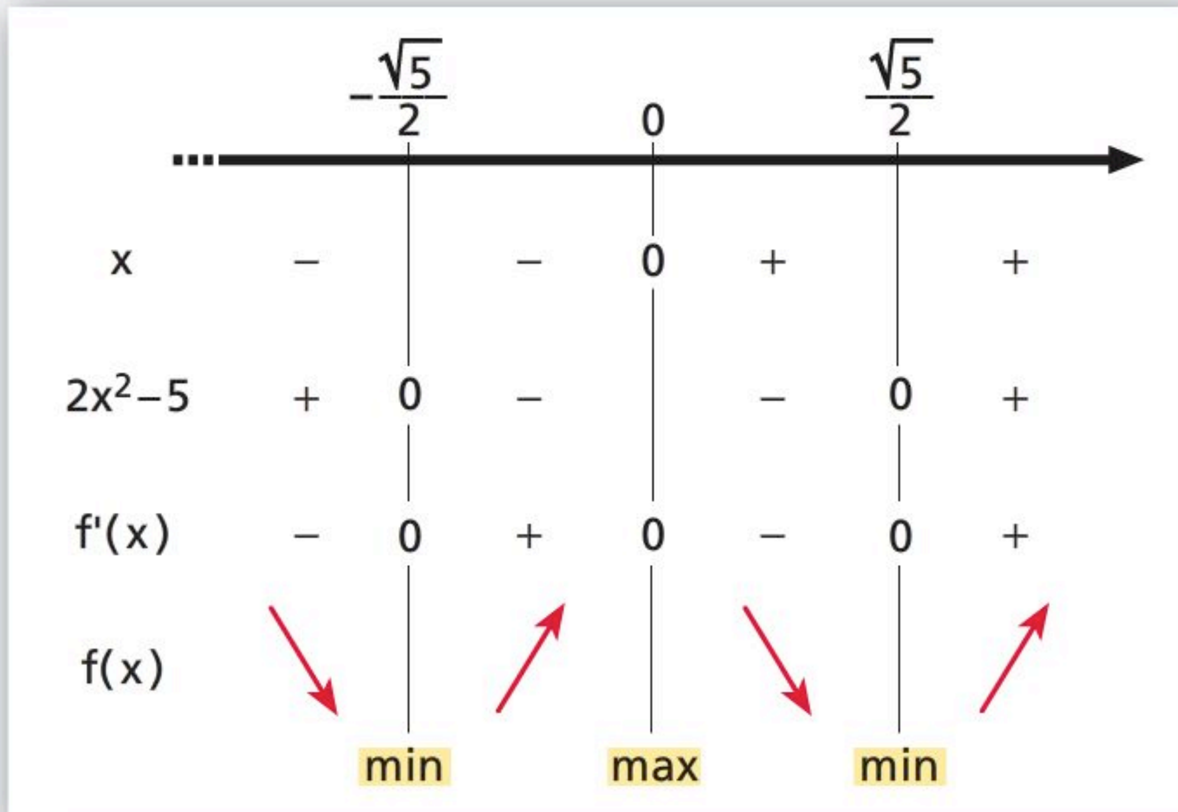
La derivata esiste per qualsiasi valore di x in quanto il trinomio $x^4 - 5x^2 + 9$ è sempre positivo.

Inoltre, essendo il denominatore sempre positivo, il segno della derivata è lo stesso di quello del numeratore. Studiamolo.

Primo fattore: positivo per $x > 0$.

Secondo fattore: $2x^2 - 5 > 0 \rightarrow x < -\sqrt{\frac{5}{2}} \vee x > \sqrt{\frac{5}{2}}$.

Compiliamo il quadro dei segni.



La funzione ha due minimi relativi:

$$x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Poiché deve essere verificata la condizione $x \geq 0$, è accettabile soltanto il valore positivo, a cui nell'intervallo considerato corrisponde il minimo assoluto. Quindi la soluzione del problema è:

$$x = \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Calcoliamo l'ordinata del punto:

$$y = \left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2 = \frac{5}{2}.$$

Il punto della parabola cercato ha coordinate $B\left(\sqrt{\frac{5}{2}}; \frac{5}{2}\right)$.

esempio

Un fabbricante di pentole vuole costruire il tipo di pentola più economica fra tutte le pentole di acciaio di forma cilindrica aventi lo stesso volume V.

Possiamo pensare che il costo sia proporzionale alla superficie y ottenuta dalla somma della superficie laterale di un cilindro e di una sua base.

Indichiamo con x la misura del raggio di base del cilindro, con h quella della sua altezza, con V quella del volume (figura 30).

Dobbiamo esprimere y in funzione di una sola incognita (per esempio, x) e della costante V e determinare il minimo della funzione.

La misura della superficie di base è:

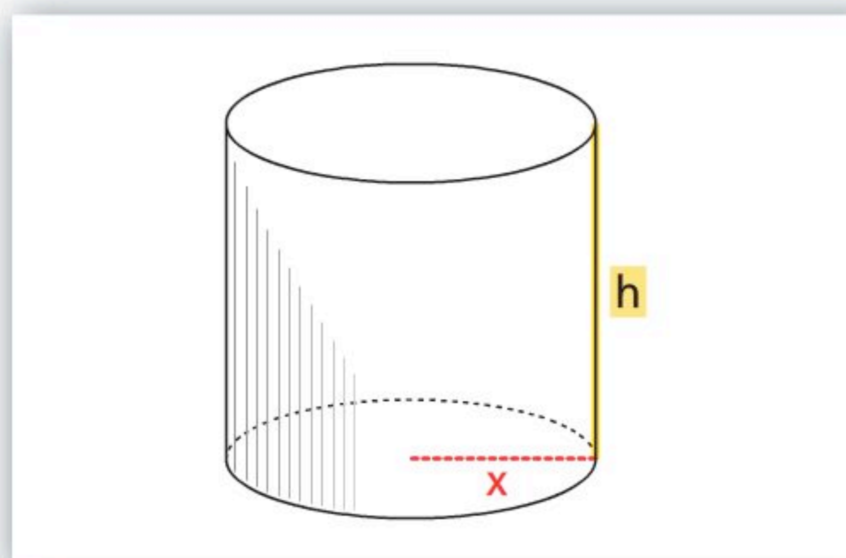
$$S_b = \pi x^2.$$

La misura della superficie laterale è:

$$S_{lat} = 2\pi x h.$$

Il volume vale:

$$V = \pi x^2 h.$$



Sostituiamo nell'espressione di S_{lat} al prodotto $\pi x h$ la frazione $\frac{V}{x}$ e otteniamo:

$$S_{lat} = \frac{2V}{x}.$$

La misura della superficie cercata è espressa dalla seguente funzione:

$$f(x) = S_b + S_{lat} = \pi x^2 + \frac{2V}{x}.$$

Essendo x la misura di una grandezza geometrica, dobbiamo porre la condizione:

$$x > 0.$$

Per determinare il minimo di $f(x)$ calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = 2\pi x + 2V \cdot \frac{-1}{x^2} = 2\left(\pi x - \frac{V}{x^2}\right) = 2 \cdot \frac{\pi x^3 - V}{x^2}.$$

Si ha $f'(x) = 0$ se $\pi x^3 - V = 0$, ossia se $x = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

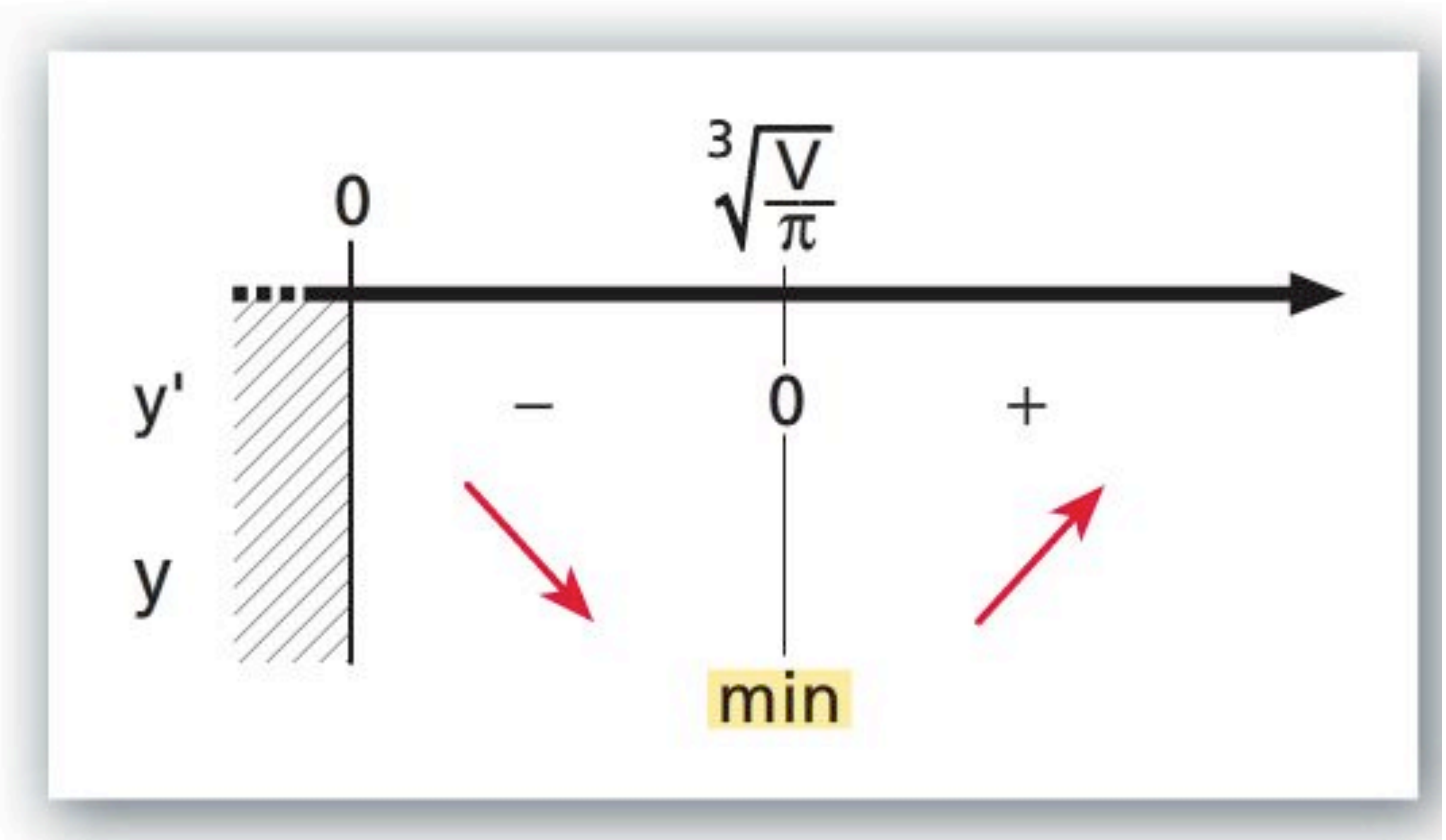
Studiamo il segno di $f'(x)$:

$$\frac{\pi x^3 - V}{x^2} > 0.$$

Poiché il denominatore è sempre positivo, è sufficiente studiare il segno del numeratore:

$$\pi x^3 - V > 0 \ \rightarrow \ x^3 > \frac{V}{\pi} \ \rightarrow \ x > \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}.$$

Compiliamo il quadro dei segni.



Concludiamo che, se il raggio misura

$$x = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}},$$

la superficie è minima.

Se calcoliamo anche la misura della corrispondente altezza, troviamo:

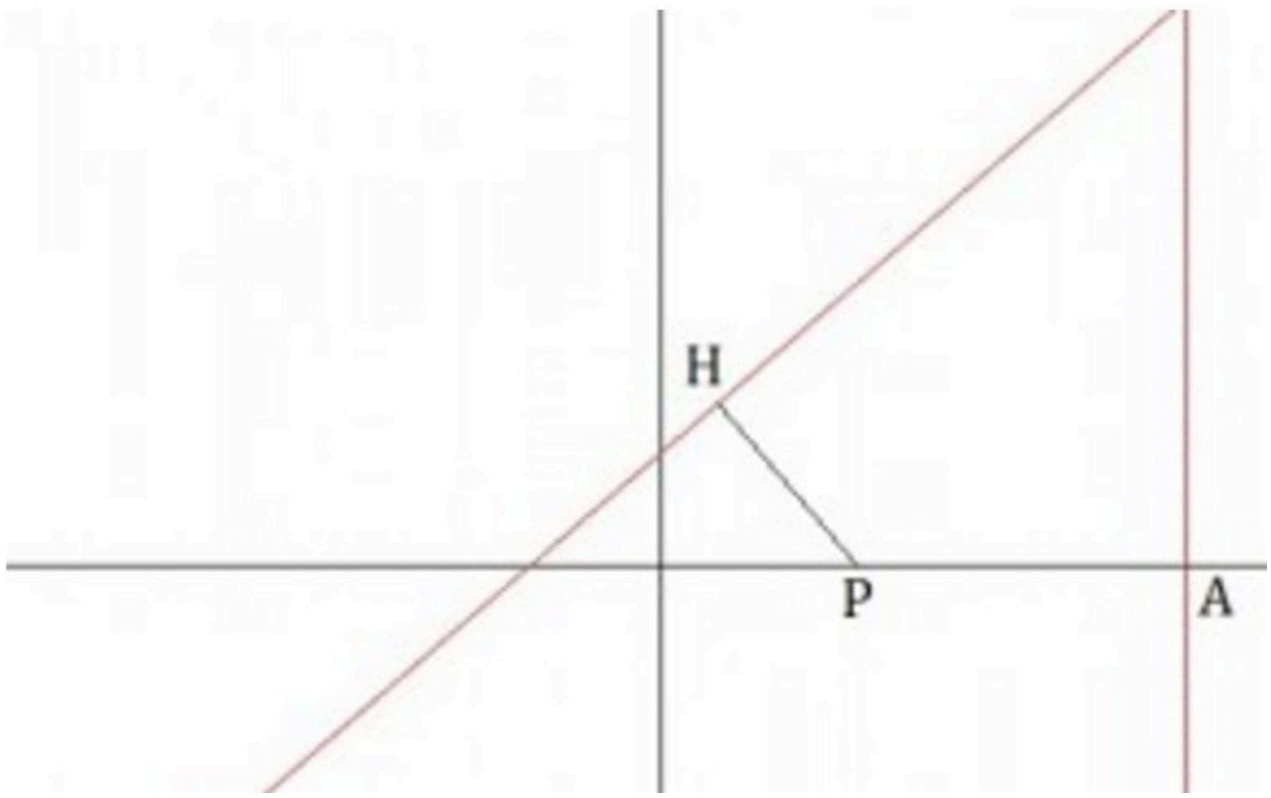
$$h = \frac{V}{\pi x^2} = \frac{V}{\pi \sqrt[3]{\left(\frac{V}{\pi}\right)^2}} = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}.$$

Fra tutte le pentole di acciaio aventi lo stesso volume, quella che ha la superficie minima ha la misura dell'altezza uguale a quella del raggio.

esempio

Determinare un punto sull'asse delle ascisse per il quale è minima la somma del quadrato della sua distanza dalla retta y=x+1 con il quadrato della sua distanza dalla retta x=4.

Rappresentazione grafica:



Chiamiamo P il punto da determinare, si ha

$$\overline{OP} = x \rightarrow P(x;0)$$

La funzione da determinare è

$$\overline{PA}^2 + \overline{PH}^2$$

possiamo scrivere PA in funzione di x:

$$\overline{PA} = 4 - x$$

Sapendo che la retta r ha equazione implicita

$$y - x - 1 = 0$$

PH è la distanza da tale retta del punto P

$$\overline{PH} = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\overline{PH} = \frac{|-x - 1|}{\sqrt{2}}$$

Ora la nostra funzione ha una sola variabile (x):

$$f = \overline{PA}^2 + \overline{PH}^2$$

$$f(x) = (4 - x)^2 + \frac{(-x - 1)^2}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 14x + 33\right)$$

Calcoliamo la derivata:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(6x - 14)$$

$$f'(x) = 3x - 7$$

Studiamone il segno:

$$f'(x) \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{7}{3}$$

Abbiamo trovato l'intervallo di x per il quale la derivata della funzione è positiva. La funzione f(x) è crescente per x maggiore di 7/3, decrescente per x minore di 7/3, ha quindi un minimo per

$$x = \frac{7}{3}$$

e il punto P avrà quindi coordinate

$$P\left(\frac{7}{3}; 0\right)$$

esempio

Determinare il punto della parabola

$$4y + x^2 = 10x - 5$$

per il quale è massima la somma delle sue coordinate.

Scrivendo l'equazione della parabola in forma esplicita otteniamo:

$$y = \frac{1}{4}\left(-x^2 + 10x - 5\right)$$

Il punto generico P della parabola ha coordinate:

$$P\left(x; \frac{1}{4}\left(-x^2 + 10x - 5\right)\right)$$

La somma delle coordinate di P è la nostra funzione di x:

$$f = x_P + y_P$$

$$f(x) = x + \frac{1}{4}\left(-x^2 + 10x - 5\right)$$

$$f(x) = -\frac{x^2}{4} + \frac{7}{2}x - \frac{5}{4}$$

Calcoliamo la derivata:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(-x + 7)$$

Studiamone il segno:

$$f'(x) \geq 0 \rightarrow x \leq 7$$

Abbiamo trovato l'intervallo di x per il quale la derivata della funzione è positiva. La funzione f(x) è crescente per x minore di 7, decrescente per x maggiore di 7, ha quindi un massimo per

$$x_P = 7 \rightarrow y_P = 4$$

e il punto P avrà quindi coordinate

$$P(7; 4)$$

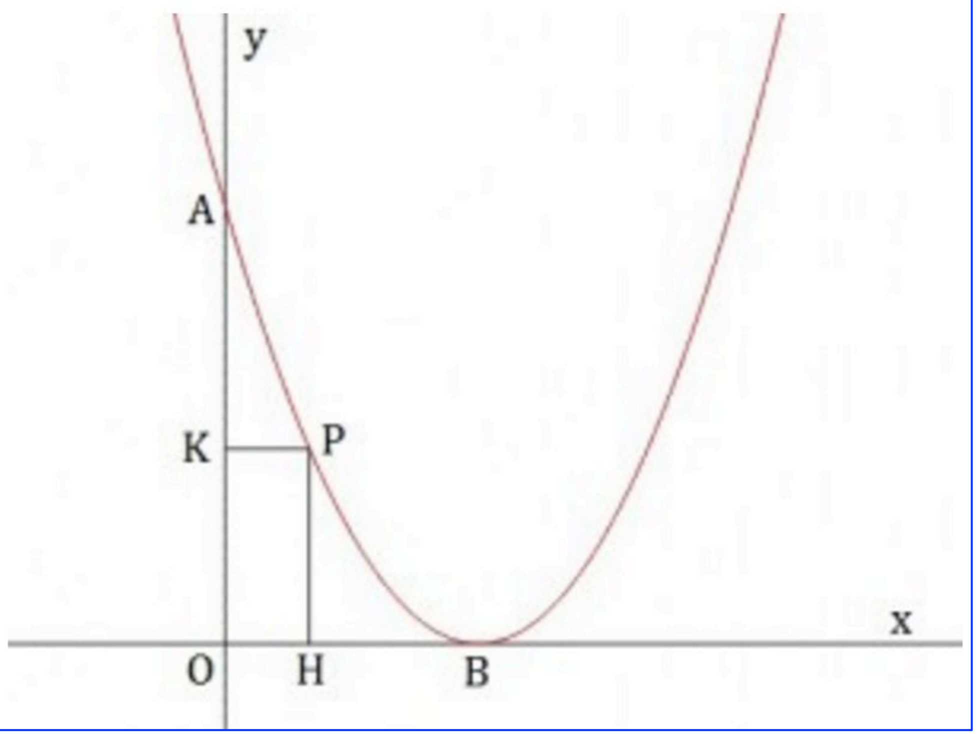
esempio

E' data la parabola

$$y = 2x^2 - 4x + 2$$

e siano A e B i suoi punti di intersezione con gli assi y=0 e x=0. Trovare i punti dell'arco AB di parabola, le cui distanze dagli assi coordinati abbiano somma minima e massima.

Rappresentazione grafica:



Abbiamo che

$$\overline{PK} = x_P = x$$

$$\overline{PH} = y_P = y$$

Sapendo che

$$y = 2x^2 - 4x + 2$$

otteniamo la somma delle distanze in funzione della sola variabile x:

$$f = \overline{PH} + \overline{PK}$$

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 2 + x$$

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 2$$

Calcoliamo la derivata:

$$f'(x) = 4x - 3$$

Studiamone il segno:

$$f'(x) \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{3}{4}$$

Abbiamo trovato l'intervallo di x per il quale la derivata della funzione è positiva. La funzione f(x) è crescente per x maggiore di 3/4, decrescente per x minore di 3/4, ha quindi un minimo per

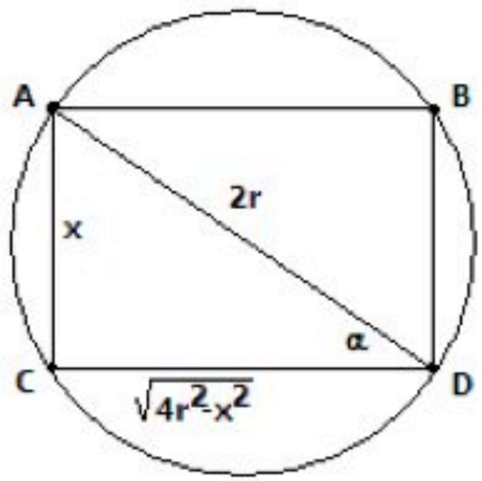
$$x_P = \frac{3}{4} \rightarrow y_P = \frac{1}{8}$$

e il punto P avrà quindi coordinate

$$P\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{8}\right)$$

esempio

Tra tutti i rettangoli iscritti in un cerchio di raggio r trovare quello di area massima.



Pongo come incognita x uno dei dei lati del rettangolo $AC = x$

Con $0 \le x \le 2r$ e per il teorema di pitagora $CD = \sqrt{4r^2 - x^2}$. Allora $Area = AC \cdot CD = x\sqrt{4r^2 - x^2}$ .Come si può osservare agli estremi, ovvero per x=0 e per x=2r

L'area è uguale a zero. (e quindi minimi assoluti). Per trovare l'area massima considero la derivata dell'area in funzione di x e la pongo uguale a zero.

$$A' = \sqrt{4r^2 - x^2} + \frac{x(-2x)}{2\sqrt{4r^2 - x^2}} = \sqrt{4r^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}} = \frac{4r^2 - 2x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}} = 0$$

$\frac{4r^2 - 2x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}} \geq 0$ $\quad 4r^2 - 2x^2 \geq 0$ $\quad -\sqrt{2}r \leq x \leq \sqrt{2}r$ il massimo ce l'ho per $x = \sqrt{2}r$ che il lato del quadrato inscritto.

Se pongo come incognita $\alpha = ABC$ con $0 \leq \alpha \leq 90°$ $AC = 2r\sin\alpha$ e $CD = 2r\cos\alpha$ da cui

$Area = AC \cdot CD = 4r^2 \sin\alpha\cos\alpha$

$Area' = 4r^2\left[\cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha\right] = 4r^2\left[\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right] = 4r^2\left[2\cos^2\alpha - 1\right] \geq 0$

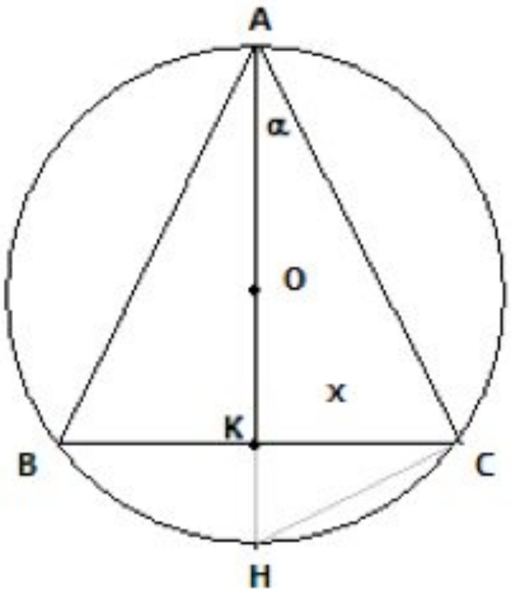
$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos\alpha \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ da cui $-45^0 \leq \alpha \leq 45^0$ per cui il massimo è dato da $\alpha = 45°$

Oppure più semplicemente $Area = AC \cdot CD = 4r^2\sin\alpha\cos\alpha = 2r^2\sin 2\alpha$

$Area' = 4r^2\cos 2\alpha \geq 0$ da cui $-90^0 \leq 2\alpha \leq 90^0$

esempio

Tra tutti i triangoli isosceli iscritti in un cerchio di raggio r trovare quello di area massima.



Pongo come incognita x $KC = x$

Con $0 \le x \le r$.,e dato che Pitagora applicato al triangolo OKC $OK = \sqrt{r^2 - x^2}$ ho che.

$KC = x$ $AK = AO + OK = r + \sqrt{r^2 - x^2}$

Allora

$$Area = \frac{1}{2} BC \cdot AK = x(r + \sqrt{r^2 - x^2})$$

Come si può osservare agli estremi, ovvero per x=0 e per x=2r L'area è uguale a zero.

(e quindi minimi assoluti). Per trovare l'area massima considero la derivata dell'area in funzione di x e la pongo uguale a zero.

$$Area' = (r+\sqrt{r^2-x^2}) + x(\frac{-2x}{2\sqrt{r^2-x^2}}) = r+\sqrt{r^2-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{r^2-x^2}} =$$

$$Area' = \frac{r\sqrt{r^2-x^2}+r^2-x^2-x^2}{\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{r\sqrt{r^2-x^2}+r^2-2x^2}{\sqrt{r^2-x^2}} = 0 \qquad \frac{r\sqrt{r^2-x^2}+r^2-2x^2}{\sqrt{r^2-x^2}} = 0$$

$$r\sqrt{r^2-x^2} = r^2-2x^2 \qquad r^4-r^2x^2 = r^4-4r^2x^2+4x^4 \qquad 4x^4 = 3r^2x^2 \qquad x^2 = \frac{3}{4}r^2 \qquad x = \frac{\sqrt{3}}{2}r$$

Da cui $BC = \sqrt{3}r$ lato del triangoli equilatero inscritto

Se pongo come incognita $\alpha = A\hat{K}C$ con $0 \le \alpha \le 90°$

$AC = 2r\cos\alpha \;\; AK = AC\cos\alpha = 2r\cos^2\alpha$ e $KC = AC\sin\alpha = 2r\sin\alpha\cos\alpha$

$Area = \frac{1}{2}BC \cdot AK = 2r^2\cos^3\alpha\sin\alpha$ da cui

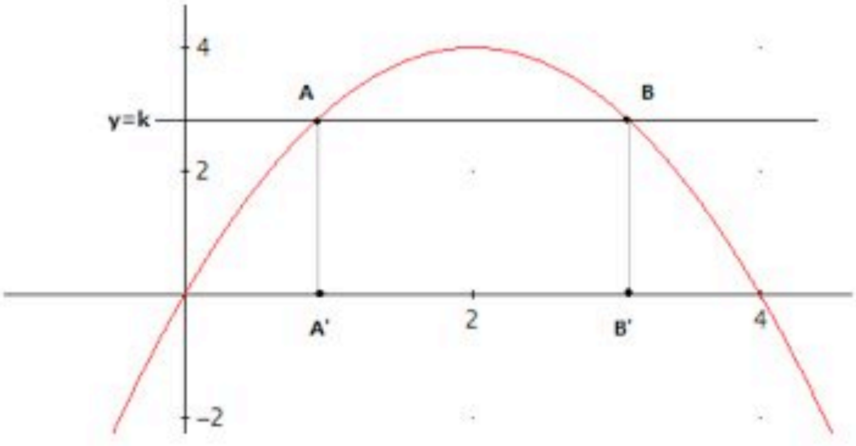
$$Area' = 2r^2\left[-3\cos^2\alpha\sin^2\alpha + \cos^4\alpha\right] = 2r^2\left[-3\cos^2\alpha(1-\cos^2\alpha + \cos^4\alpha\right] =$$

$$= 2r^2\cos^2\alpha\left[-3(1-\cos^2\alpha) + \cos^2\alpha\right] = 2r^2\cos^2\alpha\left[-3 + 4\cos^2\alpha\right] = 0$$ da cui

$-3 + 4\cos^2\alpha = 0 \;\; \cos^2\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \alpha = 30°$

esempio

Sia data la parabola $y=-x^2+4x$, trovare il rettangolo di area massima inscritto nel parte di piano compresa tra la parabola e l'asse x.



La parabola ha vertice il punto $V(2,4)$
Considero la retta y=k e siano A e B i punti in cui interseca la parabola

$$\begin{cases} y=-x^2+4x \\ y=k \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-4x+k=0 \\ y=k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2\pm\sqrt{4-k} \\ y=k \end{cases}$$ e siano $A(2-\sqrt{4-k},k)$ e $B(2+\sqrt{4-k},k)$

Poniamo come incognita $AA' = k$ dove $0 \le k \le 4$

$$AB = (2 + \sqrt{4-k}) - (2 - \sqrt{4-k}) = 2\sqrt{4-k}$$

$Area = AB \cdot AA' = 2k\sqrt{4-k}$ osserviamo che per k=0 e per k=4 l'area è uguale a 0 e quindi minimo assoluto.

$$Area' = \sqrt{4-k} + \frac{-k}{2\sqrt{4-k}} = \frac{2(4-k)-k}{2\sqrt{4-k}} = \frac{8-3k}{2\sqrt{4-k}} \ge 0 \quad k \le \frac{8}{3}$$ da cui $k = \frac{8}{3}$